

Le bord de Poisson du groupe de Thompson T
n'est pas le cercle

En collaboration avec Cosmas Kravaris et Eduardo Silva

Martín Gilabert Vio (Institut Camille Jordan)

Octobre 2, 2025

Notation

G un groupe dénombrable,

Notation

G un groupe dénombrable,

$\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dégénérée (i.e. $\bigcup_{n \geq 0} \text{supp}(\mu)^n = G$),

Notation

G un groupe dénombrable,

$\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dégénérée (i.e. $\bigcup_{n \geq 0} \text{supp}(\mu)^n = G$),

\mathbb{P} = la loi de la v.a. $(w_n)_{n \geq 0} \in G^{\mathbb{N}}$ où $w_n = g_1 g_2 \cdots g_n$ avec les $g_i \sim \mu$ indépendants.

Définition

· $F \in l^\infty(G)$ est μ -armonique si $F(g) = \sum_{h \in G} \mu(h)F(gh)$ pour tout $g \in G$.

Définition

- $F \in l^\infty(G)$ est μ -armonique si $F(g) = \sum_{h \in G} \mu(h)F(gh)$ pour tout $g \in G$.
- X espace Borel standard, $G \curvearrowright X$ une action mesurable. Une mesure $\nu \in \text{Prob}(X)$ est μ -stationnaire si $\nu = \sum_{h \in G} \mu(h)h_*\nu$.

Définition

· $F \in l^\infty(G)$ est μ -armonique si $F(g) = \sum_{h \in G} \mu(h) F(gh)$ pour tout $g \in G$.

· X espace Borel standard, $G \curvearrowright X$ une action mesurable. Une mesure $\nu \in \text{Prob}(X)$ est μ -stationnaire si $\nu = \sum_{h \in G} \mu(h) h_* \nu$.

· (X, ν) un espace de proba standard, $G \curvearrowright (X, \nu)$ nonsingulière. La transformée de Poisson de cette action est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\nu : L^\infty(X) &\rightarrow l^\infty(G) \\ f &\mapsto F, F(g) = \int_X f(x) dg_* \nu(x). \end{aligned}$$

Contexte : Bords de Poisson

Faits

Étant donnée $G \curvearrowright (X, \nu)$ nonsingulière :

· $\text{Im}(\mathcal{P}_\nu) \subseteq H^\infty(G, \mu)$ ssi $G \curvearrowright (X, \nu)$ est μ -stationnaire.

Faits

Étant donnée $G \curvearrowright (X, \nu)$ nonsingulière :

- $\text{Im}(\mathcal{P}_\nu) \subseteq H^\infty(G, \mu)$ ssi $G \curvearrowright (X, \nu)$ est μ -stationnaire.
- Dans ce cas, \mathcal{P}_ν est une isométrie à son image ssi $G \curvearrowright (X, \nu)$ est un μ -bord. (i.e. \mathbb{P} -p.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n)_* \nu$ est une delta de Dirac).

Contexte : Bords de Poisson

Faits

Étant donnée $G \curvearrowright (X, \nu)$ nonsingulière :

· $\text{Im}(\mathcal{P}_\nu) \subseteq H^\infty(G, \mu)$ ssi $G \curvearrowright (X, \nu)$ est μ -stationnaire.

· Dans ce cas, \mathcal{P}_ν est une isométrie à son image ssi $G \curvearrowright (X, \nu)$ est un μ -bord. (i.e. \mathbb{P} -p.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n)_* \nu$ est une delta de Dirac).

· (Furstenberg) A iso mesurable près, $\exists!$ μ -bord $(\partial_\mu G, \nu_\mu)$ (le bord de Poisson) t.q. $L^\infty(\partial_\mu G, \nu_\mu)$ et $H^\infty(G, \mu)$ sont isométriques via \mathcal{P}_ν .

Contexte : Bords de Poisson

Faits

Étant donnée $G \curvearrowright (X, \nu)$ nonsingulière :

· $\text{Im}(\mathcal{P}_\nu) \subseteq H^\infty(G, \mu)$ ssi $G \curvearrowright (X, \nu)$ est μ -stationnaire.

· Dans ce cas, \mathcal{P}_ν est une isométrie à son image ssi $G \curvearrowright (X, \nu)$ est un μ -bord. (i.e. \mathbb{P} -p.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n)_* \nu$ est une delta de Dirac).

· (Furstenberg) A iso mesurable près, $\exists!$ μ -bord $(\partial_\mu G, \nu_\mu)$ (le *bord de Poisson*) t.q. $L^\infty(\partial_\mu G, \nu_\mu)$ et $H^\infty(G, \mu)$ sont isométriques via \mathcal{P}_ν .

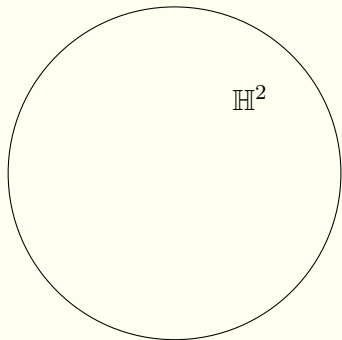
En plus, $(\partial_\mu G, \nu_\mu)$ est le μ -bord *maximal*.

Contexte : Bords de Poisson

Motivation : $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

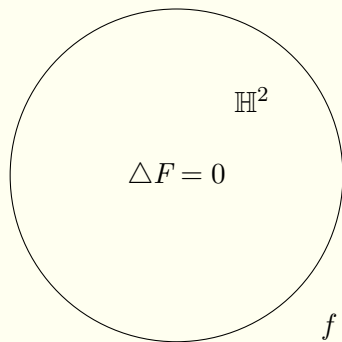
Contexte : Bords de Poisson

Motivation : $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.



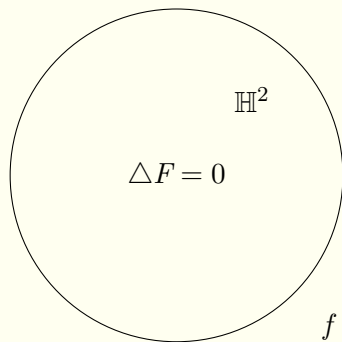
Contexte : Bords de Poisson

Motivation : $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.



Contexte : Bords de Poisson

Motivation : $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.



$$(\partial_\mu G, \nu_\mu) \cong (S^1, \text{Leb})$$

Contexte : Bords de Poisson

Question générale : étant donné G, μ , identifier $(\partial_\mu G, \nu_\mu)$.

Contexte : Bords de Poisson

Question générale : étant donné G, μ , identifier $(\partial_\mu G, \nu_\mu)$.

Exemple : $G = F_2 = \langle a, b \rangle$, μ à support fini.

Contexte : Bords de Poisson

Question générale : étant donné G, μ , identifier $(\partial_\mu G, \nu_\mu)$.

Exemple : $G = F_2 = \langle a, b \rangle$, μ à support fini.

Alors \mathbb{P} -p.s. $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w_\infty \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}^{\mathbb{N}}$.

Contexte : Bords de Poisson

Question générale : étant donné G, μ , identifier $(\partial_\mu G, \nu_\mu)$.

Exemple : $G = F_2 = \langle a, b \rangle$, μ à support fini.

Alors \mathbb{P} -p.s. $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w_\infty \in \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}^{\mathbb{N}}$.

En plus $(\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}^{\mathbb{N}}, \text{loi de } w_\infty) \cong (\partial_\mu G, \nu_\mu)$
(Dynkin-Malyutov '61).

Contexte : Groupes agissant sur S^1

On fixe $G \leq^{\phi} \text{Homeo}_0(S^1)$ t.q. $G \curvearrowright^{\phi} S^1$ est *minimale*.

Contexte : Groupes agissant sur S^1

On fixe $G \leq \text{Homeo}_0(S^1)$ t.q. $G \curvearrowright S^1$ est *minimale*.

Théorème (Antonov 84', Margulis '00)

Soit :

(1) l'action $G \curvearrowright S^1$ est conjuguée à une action par rotations, ou

Contexte : Groupes agissant sur S^1

On fixe $G \leq \text{Homeo}_0(S^1)$ t.q. $G \curvearrowright S^1$ est *minimale*.

Théorème (Antonov 84', Margulis '00)

Soit :

(1) l'action $G \curvearrowright S^1$ est conjuguée à une action par rotations, ou

(2)

pour tous $I, J \subsetneq S^1$ intervalles fermés, il existe $g \in G$ avec $\phi(g).I \subset J$.

Contexte : Groupes agissant sur S^1

On fixe $G \leq \text{Homeo}_0(S^1)$ t.q. $G \curvearrowright^\phi S^1$ est *minimale*.

Théorème (Antonov 84', Margulis '00)

Soit :

(1) l'action $G \curvearrowright S^1$ est conjuguée à une action par rotations, ou

(2) $\exists f \in \text{Homeo}_0(S^1)$ d'ordre fini qui centralise G t.q., en notant $G \curvearrowright^{\tilde{\phi}} S^1 / \{x \sim f(x)\} \cong S^1$:

pour tous $I, J \subsetneq S^1$ intervalles fermés, il existe $g \in G$ avec $\tilde{\phi}(g).I \subset J$.

Contexte : Groupes agissant sur S^1

On fixe $G \leq \text{Homeo}_0(S^1)$ t.q. $G \curvearrowright^\phi S^1$ est *minimale*.

Théorème (Antonov 84', Margulis '00)

Soit :

(1) l'action $G \curvearrowright S^1$ est conjuguée à une action par rotations, ou

(2) $\exists f \in \text{Homeo}_0(S^1)$ d'ordre fini qui centralise G t.q., en notant $G \curvearrowright^{\tilde{\phi}} S^1 / \{x \sim f(x)\} \cong S^1$:

pour tous $I, J \subsetneq S^1$ intervalles fermés, il existe $g \in G$ avec $\tilde{\phi}(g).I \subset J$.

(2) est vraie avec $f = \text{id}_{S^1}$ ssi $G \curvearrowright^\phi S^1$ est *minimale* et *proximale*.

Contexte : Groupes agissant sur S^1

On fixe $G \leq^{\phi} \text{Homeo}_0(S^1)$ t.q. $G \curvearrowright^{\phi} S^1$ est minimale et proximale, $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dég.

Contexte : Groupes agissant sur S^1

On fixe $G \leq^{\phi} \text{Homeo}_0(S^1)$ t.q. $G \curvearrowright^{\phi} S^1$ est minimale et proximale, $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dég.

Théorème (Deroin-Navas-Kleptsyn '07)

Il existe une unique mesure μ -stationnaire $\nu \in \text{Prob}(S^1)$, et (S^1, ν) est un μ -bord.

Contexte : Groupes agissant sur S^1

Pour un réseau $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et μ de support fini on trouve $(\partial_\mu G, \nu_\mu) \cong (S^1, \nu)$.

Contexte : Groupes agissant sur S^1

Pour un réseau $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et μ de support fini on trouve $(\partial_\mu G, \nu_\mu) \cong (S^1, \nu)$.

Ceci est vrai encore pour une classe plus large de groupes de difféomorphismes, dites *fortement localement discrets* (Deroin '11).

Contexte : Groupes agissant sur S^1

Pour un réseau $G \leq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et μ de support fini on trouve $(\partial_\mu G, \nu_\mu) \cong (S^1, \nu)$.

Ceci est vrai encore pour une classe plus large de groupes de difféomorphismes, dites *fortement localement discrets* (Deroin '11).

Question : (Deroin-Kleptsyn-Navas, Deroin, Navas) pour quels $G \leq \mathrm{Homeo}_0(S^1)$ a-t-on $(\partial_\mu G, \nu_\mu) \cong (S^1, \nu)$? Est-ce le cas pour le groupe de Thompson T ?

Contexte : Groupes agissant sur S^1

Le groupe de Thompson T est le groupe de homéomorphismes dyadiques affines par morceaux de \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Contexte : Groupes agissant sur S^1

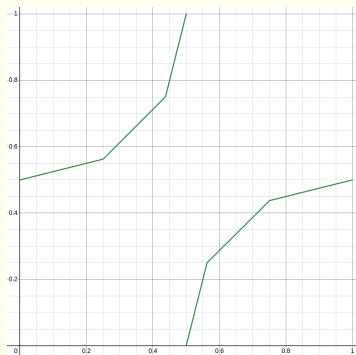
Le groupe de Thompson T est le groupe de homéomorphismes dyadiques affines par morceaux de \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

C-à-d $g \in T$ s'il existe un ensemble fini $F \subset \mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$ t.q. pour toute cc C de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus F$, on a $g|_C(x) = 2^k x + b$ pour certains $k \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$.

Contexte : Groupes agissant sur S^1

Le groupe de Thompson T est le groupe de homéomorphismes dyadiques affines par morceaux de \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

C-à-d $g \in T$ s'il existe un ensemble fini $F \subset \mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$ t.q. pour toute cc C de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus F$, on a $g|_C(x) = 2^k x + b$ pour certains $k \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}$.



Contexte : Groupes agissant sur S^1

Remarque : si (S^1, ν) était le bord de Poisson de (T, μ) , alors (Zimmer) ν -p.t. $x \in S^1$ aurait $\text{Stab}_T(x)$ moyennable.

Contexte : Groupes agissant sur S^1

Remarque : si (S^1, ν) était le bord de Poisson de (T, μ) , alors (Zimmer) ν -p.t. $x \in S^1$ aurait $\text{Stab}_T(x)$ moyennable.

Mais tous les $\text{Stab}_T(x)$ contiennent le groupe de Thompson $F = \text{Stab}_T(0)$, qui serait donc moyennable.

Résultats

On fixe $G \leq \text{Homeo}_0(S^1)$ agissant de manière minimale, proximale et *topologiquement non libre* (i.e. il existe $g \in G \setminus \{e_G\}$ t.q. $\text{Int}(\text{Fix}(g)) \neq \emptyset$), et $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dég.

Résultats

On fixe $G \leq \text{Homeo}_0(S^1)$ agissant de manière minimale, proximale et *topologiquement non libre* (i.e. il existe $g \in G \setminus \{e_G\}$ t.q. $\text{Int}(\text{Fix}(g)) \neq \emptyset$), et $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dég.

Théorème (G-K-S 25')

Si $H(\mu) = -\sum_{g \in G} \mu(g) \log \mu(g)$ est finie, alors (S^1, ν) n'est pas le bord de Poisson de (G, μ) .

Résultats

On fixe $G \leq \text{Homeo}_0(S^1)$ agissant de manière minimale, proximale et *topologiquement non libre* (i.e. il existe $g \in G \setminus \{e_G\}$ t.q. $\text{Int}(\text{Fix}(g)) \neq \emptyset$), et $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dég.

Théorème (G-K-S 25')

Si $H(\mu) = -\sum_{g \in G} \mu(g) \log \mu(g)$ est finie, alors (S^1, ν) n'est pas le bord de Poisson de (G, μ) .

Théorème (G-K-S 24')

Si $G \leq \text{PAff}_+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et $\sum_{g \in G} \mu(g) \#\{\text{discontinuités de } g'\}$ est finie, alors (S^1, ν) n'est pas le bord de Poisson (G, μ) .

Résultats

On fixe $G \leq \text{Homeo}_0(S^1)$ agissant de manière minimale, proximale et *topologiquement non libre* (i.e. il existe $g \in G \setminus \{e_G\}$ t.q. $\text{Int}(\text{Fix}(g)) \neq \emptyset$), et $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dég.

Théorème (G-K-S 25')

Si $H(\mu) = -\sum_{g \in G} \mu(g) \log \mu(g)$ est finie, alors (S^1, ν) n'est pas le bord de Poisson de (G, μ) .

Théorème (G-K-S 24')

Si $G \leq \text{PAff}_+(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et $\sum_{g \in G} \mu(g) \#\{\text{discontinuités de } g'\}$ est finie, alors (S^1, ν) n'est pas le bord de Poisson (G, μ) . En plus, on peut expliciter un μ -bord (X, η) qui n'est pas un quotient de (S^1, ν) .

On reprend G dénombrable, $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dég. On fixe (X, ν) un μ -bord.

On reprend G dénombrable, $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dég. On fixe (X, ν) un μ -bord.

Théorème (Kaimanovich '85)

Si $H(\mu) < \infty$, alors $(\partial_\mu G, \nu_\mu) \cong (X, \nu)$ ssi $h_{(X, \nu)}(\mu) = 0$.

On reprend G dénombrable, $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dég. On fixe (X, ν) un μ -bord.

Théorème (Kaimanovich '85)

Si $H(\mu) < \infty$, alors $(\partial_\mu G, \nu_\mu) \cong (X, \nu)$ ssi $h_{(X, \nu)}(\mu) = 0$.

Ici $h_{(X, \nu)}(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_X H(p_n^\xi) d\nu(\xi)$, où p_n^ξ = distribution de w_n conditionnée à converger à ξ .

On reprend G dénombrable, $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dégénérée.

Théorème (Kaimanovich-Vershik '83)

Si $H(\mu) < \infty$, alors $(\partial_\mu G, \nu_\mu)$ est trivial ssi $h(\mu) = 0$.

On reprend G dénombrable, $\mu \in \text{Prob}(G)$ non-dégénérée.

Théorème (Kaimanovich-Vershik '83)

Si $H(\mu) < \infty$, alors $(\partial_\mu G, \nu_\mu)$ est trivial ssi $h(\mu) = 0$.

Ici $h(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mu^{*n})$.

(Erschler '07) OPS $e_G \in \text{supp}(\mu)$.

Alors $h(\mu) > 0$.

(Erschler '07) OPS $e_G \in \text{supp}(\mu)$. Supposons que $\exists a \in \text{supp}(\mu) \setminus \{e_G\}$ et $p, c \in (0, 1)$ qui satisfont :

Alors $h(\mu) > 0$.

(Erschler '07) OPS $e_G \in \text{supp}(\mu)$. Supposons que $\exists a \in \text{supp}(\mu) \setminus \{e_G\}$ et $p, c \in (0, 1)$ qui satisfont : pour tout $n \in \mathbb{N}$ suff. grand, avec proba $\geq p$ on peut trouver des temps $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ avec $k \geq cn$ t.q. on peut écrire $w_n = b_1 a^{\varepsilon_1} b_2 a^{\varepsilon_2} \dots a^{\varepsilon_k} b_{k+1}$ avec :

Alors $h(\mu) > 0$.

(Erschler '07) OPS $e_G \in \text{supp}(\mu)$. Supposons que $\exists a \in \text{supp}(\mu) \setminus \{e_G\}$ et $p, c \in (0, 1)$ qui satisfont : pour tout $n \in \mathbb{N}$ suff. grand, avec proba $\geq p$ on peut trouver des temps $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ avec $k \geq cn$ t.q. on peut écrire $w_n = b_1 a^{\varepsilon_1} b_2 a^{\varepsilon_2} \dots a^{\varepsilon_k} b_{k+1}$ avec :

- les $b_i \in G$ et $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$,

Alors $h(\mu) > 0$.

(Erschler '07) OPS $e_G \in \text{supp}(\mu)$. Supposons que $\exists a \in \text{supp}(\mu) \setminus \{e_G\}$ et $p, c \in (0, 1)$ qui satisfont : pour tout $n \in \mathbb{N}$ suff. grand, avec proba $\geq p$ on peut trouver des temps $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ avec $k \geq cn$ t.q. on peut écrire $w_n = b_1 a^{\varepsilon_1} b_2 a^{\varepsilon_2} \dots a^{\varepsilon_k} b_{k+1}$ avec :

- les $b_i \in G$ et $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$,
- les increments en temps i_j sont a^{ε_j} , et

Alors $h(\mu) > 0$.

(Erschler '07) OPS $e_G \in \text{supp}(\mu)$. Supposons que $\exists a \in \text{supp}(\mu) \setminus \{e_G\}$ et $p, c \in (0, 1)$ qui satisfont : pour tout $n \in \mathbb{N}$ suff. grand, avec proba $\geq p$ on peut trouver des temps $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ avec $k \geq cn$ t.q. on peut écrire $w_n = b_1 a^{\varepsilon_1} b_2 a^{\varepsilon_2} \dots a^{\varepsilon_k} b_{k+1}$ avec :

- les $b_i \in G$ et $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$,
- les increments en temps i_j sont a^{ε_j} , et
- tous les éléments $b_1 a^{\tilde{\varepsilon}_1} \dots a^{\tilde{\varepsilon}_k} b_{k+1}$ où les $\tilde{\varepsilon}_j \in \{0, 1\}$ sont différents.

Alors $h(\mu) > 0$.

Soit $\mu \in \text{Prob}(T)$ non-dég. t.q.

$\sum_{g \in G} \mu(g) \#\{\text{discontinuités de } g'\}$ est finie.

Soit $\mu \in \text{Prob}(T)$ non-dég. t.q.

$\sum_{g \in G} \mu(g) \#\{\text{discontinuités de } g'\}$ est finie.

Tout $g \in T$ définit $\mathcal{C}(g): \mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ à support fini par

$$\mathcal{C}(g)(x) = \log_2 \left(\frac{(g')^+(x)}{(g')^-(x)} \right).$$

Soit $\mu \in \text{Prob}(T)$ non-dég. t.q.

$\sum_{g \in G} \mu(g) \#\{\text{discontinuités de } g'\}$ est finie.

Tout $g \in T$ définit $\mathcal{C}(g): \mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ à support fini par

$$\mathcal{C}(g)(x) = \log_2 \left(\frac{(g')^+(x)}{(g')^-(x)} \right).$$

\mathbb{P} -p.s. $\mathcal{C}(w_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_\infty \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}}$, et $(\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}[1/2]/\mathbb{Z}}, \text{loi de } \mathcal{C}_\infty)$ est le μ -bord (X, η) .